Санкт-Петербургский государственный университет

Е.А. Селицкая

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. СТАТИКА (РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ)

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2017

Селицкая Е. А.

Теоретическая механика. Статика (Равновесие произвольной системы сил). Учебно-методическое пособие. СПб, 2017. – 25 с.

Данное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений и является изложением методического материала, необходимого для решения задач статики (равновесия произвольной системы сил), и примеров для самостоятельного решения. Рассчитано для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика».

Введение

Механика – это наука, изучающая основные законы механического движения и взаимодействия материальных тел. Основными объектами в механике выступают материальная точка, система материальных точек и абсолютно твердое тело. Поэтому в основе курса теоретической механики лежит изучение равновесия и движения данных объектов.

Механика демонстрирует научный подход от наблюдения к математической модели, ее анализ, получение решений и их применение в практической деятельности. Становление этой науки длилось тысячелетиями. В связи с интенсивным освоением космического пространства и созданием теории управляемых космических полетов, а также автоматизированных производств в современной технике и технологиях, был задан новый импульс в развитии механики. Ее изучение является не только базой для многих общетехнических дисциплин, но и имеет самостоятельное мировоззренческое и методологическое значение.

Курс теоретической механики делится на три части: **кинематика** – это раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения точек или тела вне зависимости от их массы и причин, вызывающих это движение; **динамика** – раздел, в котором изучаются движения тел в связи с действующими на них силами; **статика** – раздел, изучающий правила эквивалентного преобразования и условия равновесия систем сил.

В учебно-методическом пособии использованы материалы, опубликованные в [1] – [5].

1. Основные определения и аксиомы статики

Основными задачами статики являются:
а) преобразования одних систем сил, приложенных к твердому телу, в другие, эквивалентные системы;
б) определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

1.1. Основные понятия

Сила – это мера механического взаимодействия тел при непосредственном контакте, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия. Математически ее можно задать как вектор, характеризующийся числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения (Рис. 1).

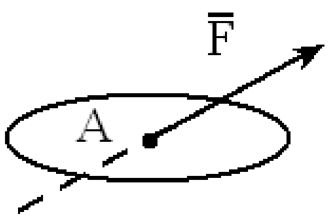

Рис. 1

В механике вектор силы является скользящим. Прямая, по которой направлена сила, называется *линией действия силы*. Аналитически вектор силы можно задать проекциями на выбранные оси прямоугольной системы координат F_x, F_y, F_z:
$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$, где $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ – единичные орты системы координат.

Тогда модуль силы равен $\left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, а направление вектора в пространстве определяется с помощью направляющих косинусов:

$$\cos\left(\widehat{x,\vec{F}}\right) = \frac{F_x}{|\vec{F}|}, \cos\left(\widehat{y,\vec{F}}\right) = \frac{F_y}{|\vec{F}|}, \cos\left(\widehat{z,\vec{F}}\right) = \frac{F_z}{|\vec{F}|}.$$

Системой сил называется совокупность нескольких сил, действующих на тело. При этом, если такая система не нарушает состояние равновесия твердого тела, то она будет называться *уравновешенной*. Если одну систему сил можно заменить другой, не нарушая состояния тела, то такие системы называются *эквивалентными*.

Основным объектом рассмотрения являются *механическая система* и *абсолютно твердое* тело (или твердое тело). Механическая система – это совокупность материальных точек, взаимосвязанных между собой по каким-либо правилам. Абсолютно твердым телом называется неизменная механическая система (т.е. система, расстояние между точками которой остается постоянным), состоящая из континуума материальных точек.

1.2. Основные аксиомы

В основе статики лежат аксиомы:
1. *Аксиома инерции:* изолированная материальная точка находится в покое

либо движется равномерно и прямолинейно. Под состоянием равновесия материальной точки и твердого тела понимают не только состояние покоя, но и движение по инерции, являющимся равномерным и прямолинейным.

2. *Аксиома об уравновешенности двух сил, приложенных к твердому телу:* абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль общей линии действия (Рис. 2). Например, на рис. 3 силы не будут уравновешенными, т.к. точки приложения векторов сил принадлежат разным телам.

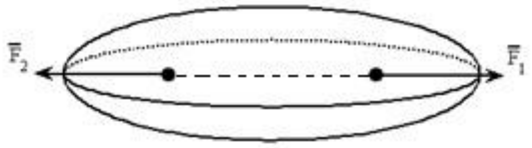

Рис. 2

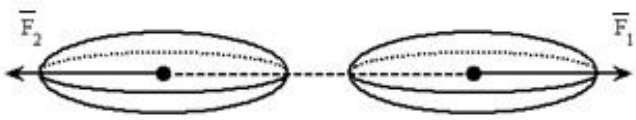

Рис. 3

3. *Аксиома присоединения и исключения уравновешенных систем сил:* к абсолютно твердому телу можно прикладывать или отбрасывать уравновешенную систему сил.

Следствием двух последних аксиом является то, что силу можно переносить вдоль линии ее действия.

4. *Аксиома о равнодействующей:* две силы, приложенные к абсолютно твердому телу в одной точке, имеют равнодействующую, проходящую через эту точку и равную их геометрической сумме (Рис. 4):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\widehat{\vec{F}_1, \vec{F}_2})}.$$

Из аксиомы следует, что силу можно разложить по заранее выбранному направлению на любое число направляющих.

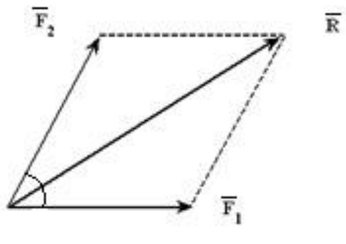

Рис. 4

5. *Аксиома о равенстве действия и противодействия:* силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены в противоположные стороны по одной прямой.

6. *Аксиома о сохранении равновесия механической системы при наложении дополнительных механических связей:* состояние равновесия механической системы сохранится в том случае, если на систему наложить

дополнительную механическую связь. Отсюда следует, что равновесие деформируемого тела не нарушится при его затвердевании, так как затвердевание тела эквивалентно наложению дополнительных механических связей. Поэтому необходимые условия равновесия деформируемых и абсолютно твердых тел совпадают, что позволяет применять полученные результаты для реальных тел и конструкций, не являющихся абсолютно твердыми.

7. *Аксиома освобождаемости от связей:* всякое несвободное тело можно считать свободным, если мысленно освободить его от связей, а их действие заменить соответствующими реакциями.

1.3. Связи и их реакции

Свободным называется тело, если его движение в пространстве ничем не ограничено. Если же на движение твердого тела наложены ограничения, препятствующие его перемещению в некоторых направлениях, то такое тело называется *несвободным*, а сами ограничения называются *связями*. Например, для книги, лежащей на столе, стол будет связью, т.к. он препятствует движению книги в некотором направлении.

Сила, с которой связь действует на твердое тело, называется *реакцией связи*. Если силу, с которой тело действует на связь, считать действием, то реакция связи является противодействием. При этом сила-действие приложена к связи, а реакция связи приложена к твердому телу. Силы, действующие на твердое тело и не являющиеся реакциями, называются *активными*.

Таким образом, при расстановке сил реакций механических связей необходимо следовать правилу, которое заключается в следующем: реакция связи в общем случае может состоять из двух силовых факторов – силы, приложенной в точке наложения, и пары сил.

Если связь запрещает поступательное движение тела, появляется сила реакции, направление которой противоположно этому движению. Если же связь запрещает вращение тела, то возникает пара сил реакции связи, вектор момента которой будет направлен вдоль оси вращения.

Приведем некоторые виды связей и их реакции.

1. Идеально гибкая нерастяжимая невесомая нить (Рис. 5).

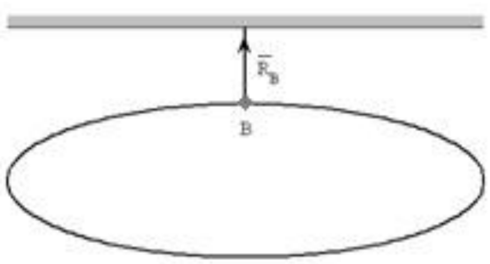

Рис. 5

К такому виду можно отнести трос, канат, цепь, ремень. При этом реакция направлена вдоль нити от точки закрепления тела к точке подвеса. Пары сил реакции в этом случае не возникает, так как поворот тела разрешен вокруг любой оси, проходящей через точку закрепления.

2. Идеальный стержень (Рис. 6). Идеальным называется жесткий невесомый прямолинейный стержень, на концах которого присутствуют шарниры, соединяющие его с другими частями конструкции. Реакция связи направлена вдоль этого стержня. Отличие его от идеальной нити заключается в том, что он может быть сжат.

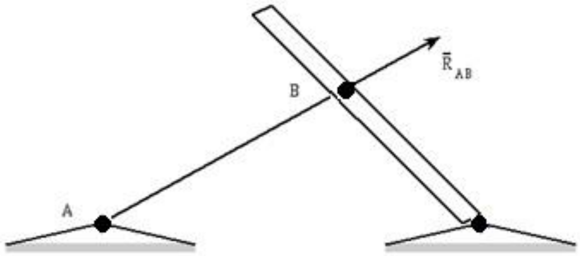

Рис. 6

3. Гладкая поверхность (Рис. 7). В случае свободного опирания двух тел, поверхность одного из которых является абсолютно гладкой, реакция гладкой поверхности направлена по нормали к этой поверхности и перпендикулярна их общей касательной.

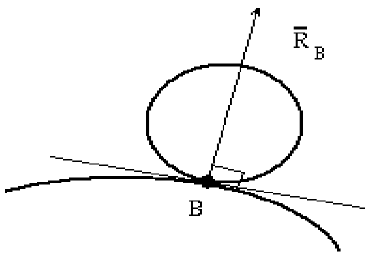

Рис. 7

4. Опорная точка. Если твердое тело в точках A и B опирается на ребра двугранных углов, а в точке C – на гладкую плоскость (Рис. 8), то для определения направления нужно представить, что двугранный угол опирается на твердое тело, являющееся для него связью. Поэтому приходим к предыдущему случаю, когда реакция направлена перпендикулярно поверхности. Если же твердое тело упирается острием в угол (например, лестничный выступ), то связь нужно рассматривать как двойную, препятствующую перемещению тела в горизонтальном и вертикальном направлении. В таком случае две составляющие опорной реакции следует направлять в противоположные стороны данным перемещениям.

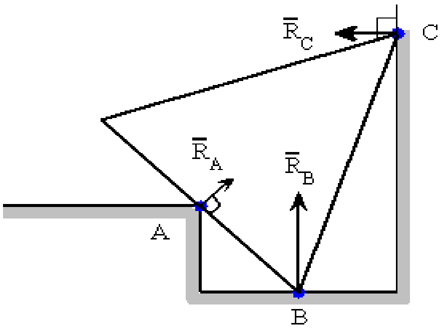

Рис. 8

5. Подвижный шарнир. Связь такого рода осуществляется либо

цилиндрическим, либо сферическим шарниром. Такая связь ограничивает поступательное движение тела в некоторых направлениях. Поэтому реакция связи может быть представлена в виде двух (случай цилиндрического шарнира Рис. 9) или трех (случай сферического шарнира Рис 10) взаимноперпендикулярных составляющих.

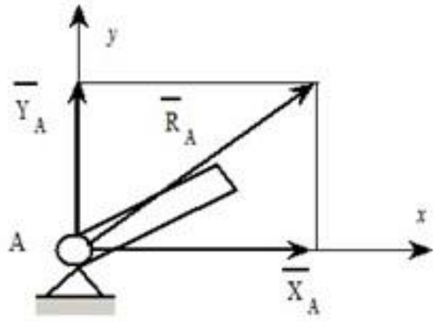

Рис. 9

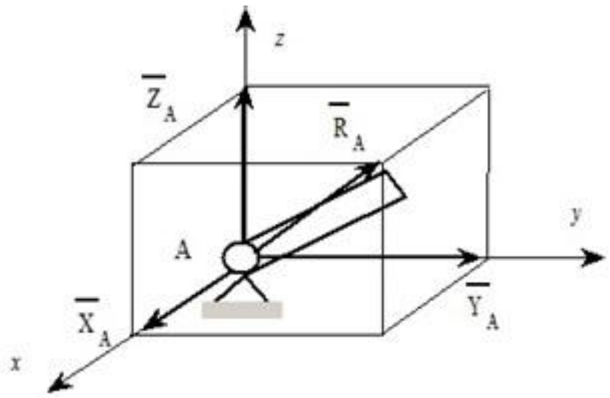

Рис.10

6. Жесткая заделка (Рис. 11). В этом случае связь запрещает не только любое поступательное движение тела, но и поворот вокруг любой из осей, проходящих через точку закрепления. Поэтому, как и в предыдущем случае, реакция связи представляется в виде трех составляющих и пары сил реакции, момент которой не известен ни по величине, ни по направлению. При этом неизвестную пару заменяют эквивалентной системой трех пар, моменты которых направлены вдоль осей координат.

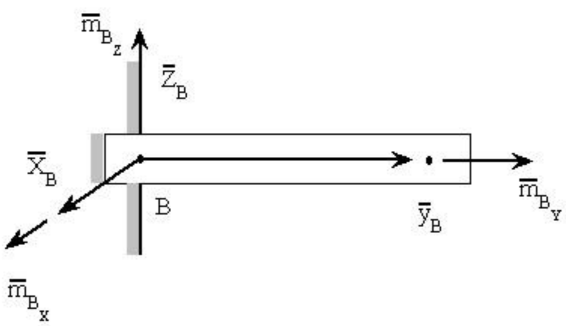

Рис. 11

1.4. Момент силы относительно центра и оси

Для характеристики вращательного действия силы вводится понятие момента силы относительно центра (или точки).

Моментом силы относительно точки называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора, проведенного из точки O в точку приложения силы, на вектор силы $\vec{F}$. В механике эта величина обозначается $\vec{m}_O(\vec{F})$ и равен $\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ (Рис. 12)

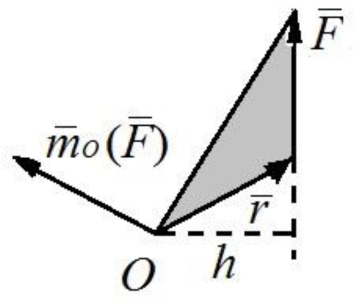

Рис. 12

Направление вектора момента силы можно определить по правилу векторного произведения или же так: вектор момента направлен перпендикулярно плоскости, содержащей радиус-вектор и вектор силы, в ту сторону, с которой поворот от действия силы виден происходящим против хода часовой стрелки. Абсолютное значение вектора момента равно произведению модуля силы на расстояние h от точки O до линии действия силы $\vec{F}$, называемое *плечом*, т.к. $\left|\vec{m}_O(\vec{F})\right| = |\vec{r}|\left|\vec{F}\right| \sin(\widehat{\vec{F},\vec{r}}) = Fh$. Как видно из рис.12, плечо является кратчайшим расстоянием от точки до линии действия силы. Отсюда видно, что если линия действия силы пересекает точку, относительно которой определяется момент, то значение момента будет нулевым, т.к. h равен нулю.

При этом знак момента может быть как положительным, так и отрицательным. В случае, если сила пытается повернуть тело против хода часовой стрелки, то знак будет положителен, в противном случае – отрицательным. Например, на рис.12 знак момента положителен.

Моментом силы относительно оси называется алгебраическая величина, равная проекции вектора момента силы, относительно произвольной точки оси на эту ось, обозначается $m_z(\vec{F})$ (Рис. 13) и равен $m_z(\vec{F}) = \text{пр}_z\vec{m}_O(\vec{F})$.

Основными способами определения момента силы относительно оси являются аналитический и геометрический.

В аналитическом определении момента относительно оси воспользуемся определением момента и правилом векторного произведения:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(yF_z - zF_y\right)\vec{\imath} + (zF_x - xF_z)\vec{\jmath} + \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}.$$

Откуда

$$m_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y, m_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z, m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x.$$

Тогда, зная моменты силы относительно осей декартовых координат, можно определить величину момента этой силы относительно точки O, являющейся началом координат, и направление:

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = \sqrt{m_x^2(\vec{F}) + m_y^2(\vec{F}) + m_z^2(\vec{F})};$$

$$\cos\left[\widehat{x, \vec{m}_O(\vec{F})}\right] = \frac{m_x(\vec{F})}{|\vec{m}_O(\vec{F})|}, \cos\left[\widehat{y, \vec{m}_O(\vec{F})}\right] = \frac{m_y(\vec{F})}{|\vec{m}_O(\vec{F})|}, \cos\left[\widehat{z, \vec{m}_O(\vec{F})}\right] = \frac{m_z(\vec{F})}{|\vec{m}_O(\vec{F})|}.$$

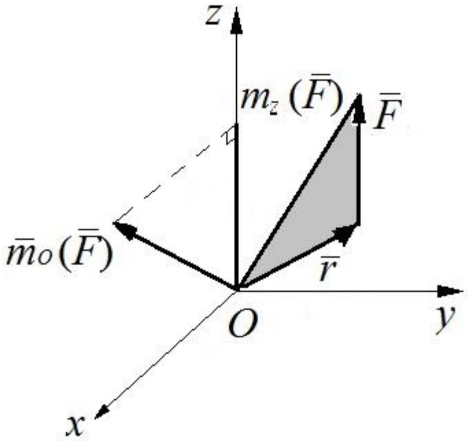

Рис. 13

Для того, чтобы геометрически определить момент силы относительно некоторой оси, нужно провести плоскость P (Рис. 14), перпендикулярную оси z, спроецировать вектор силы на эту плоскость и вычислить момент проекции силы относительно точки, являющейся точкой пересечения оси и плоскости.

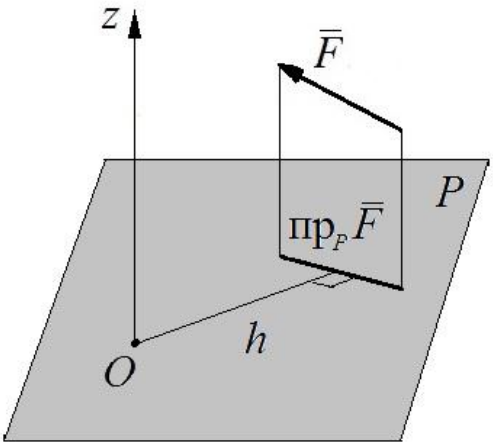

Рис. 14

Поэтому, при вычислении моментов силы относительно координатных осей, силу следует предварительно разложить на составляющие, параллельные координатным осям, и находить момент каждой составляющей отдельно.

Эквивалентность аналитического и геометрического способов вытекает из равенств:

$$m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x = xF_{\pi y} - yF_{\pi x} = \text{пр}_P\vec{F}h.$$

Момент силы относительно оси может быть положительным и отрицательным: положителен, если, глядя с конца оси, поворот силы осуществляется против хода часовой стрелки, и отрицателен – в противном случае. В случаях параллельности (или совпадения) и пересечения линия действия силы с осью момент силы равен нулю.

1.5. Пара сил

Система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в противоположные стороны, называется *парой сил* $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ (Рис. 15), где расстояние h между линиями действия сил есть *плечо пары*. Для характеристики действия на твердое тело пары сил вводится понятие момента пары. Вектор момента пары сил равен векторному моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы:

$$\vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{m}_A(\vec{F}_2) = \vec{m}_B(\vec{F}_1).$$

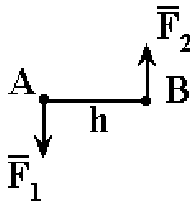

Рис. 15

Следовательно, по величине момент пары сил равен произведению модуля одной из сил пары на плечо $|\vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)| = |\vec{F}_1||AB| \sin\alpha = F_1 h$. Если пара сил стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, то знак момента пары положителен, если же пара стремится повернуть тело по ходу часовой стрелки, то знак момента отрицателен.

Теория пар сил сводится к нескольким основным теоремам.

Теорема 1. Пару сил, приложенную к твердому телу, не нарушая его состояния, можно перемещать в плоскости ее действия и переносить в любую другую плоскость, параллельную данной.

Теорема 2. Пары сил, моменты которых равны, эквивалентны. Пары сил называются эквивалентными, если одну из пар можно заменить другой, не нарушая состояния твердого тела.

Теорема 3. Система двух пар сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ и $\{\vec{F}_1', \vec{F}_2'\}$, действующая на твердое тело, эквивалентна одной паре $\{\vec{R}, \vec{R}'\}$, момент которой равен геометрической сумме моментов составляющих пар:

$$\vec{m}(\vec{R}, \vec{R}') = \vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) + \vec{m}(\vec{F}_1', \vec{F}_2').$$

В случае системы двух пар, лежащих в одной плоскости, момент эквивалентной пары равен алгебраической сумме моментов составляющих пар.

Таким образом, из теорем вытекает, что, не изменяя действия пары на твердое тело, ее можно переносить в любое место плоскости ее действия и в другую плоскость, параллельную исходной плоскости действия. Пару можно поворачивать, менять величины плеча и сил, сохраняя постоянным направление вращения и величину момента пары. Следовательно, основной характеристикой пары является вектор ее момента, поэтому пару удобнее представлять этим вектором, а не двумя противоположно направленными силами.

Необходимым и достаточным **условием равновесия системы пар сил**, приложенных к твердому телу, является равенство нулю суммы моментов данных пар. В пространственном случае расположения пар

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k = \vec{0}$$

И в плоском

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = 0$$

Задача. *Определить момент пары (вращающий момент) $m_{вр}$, создаваемый электродвигателем при равномерном вращении вала по известным моментам пар m_1, m_2, m_3, m_4, приложенным к валу через четыре шкива (Рис.16).*

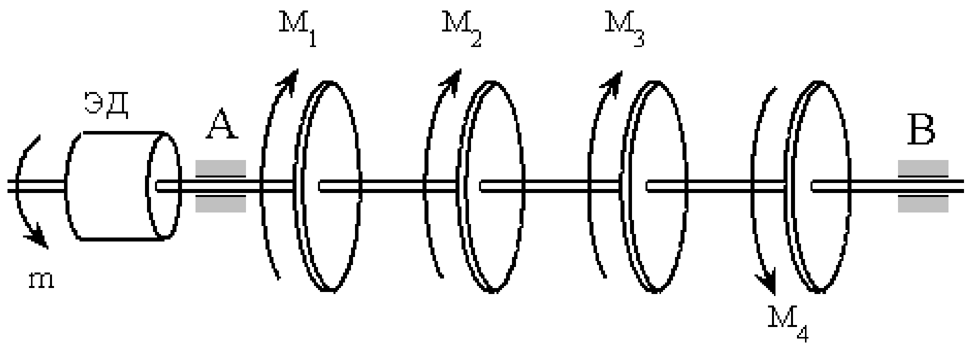

Рис. 16

Решение. Поскольку система находится в равновесии под действием пяти пар, расположенных в параллельных плоскостях, используем условие равновесия для плоского случая в алгебраической форме: $\sum_{k=1}^{n} m_k = 0$, тогда $m_{вр} - m_1 - m_2 - m_3 + m_4 = 0$, откуда $m_{вр} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.

1.6. Основные теоремы статики

Пусть на твердое тело действует произвольная система сил. Введем следующие определения.

Главным вектором системы сил $\vec{Q}$ называется геометрическая сумма всех сил системы, действующих на твердое тело:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

Проекции Q_x, Q_y, Q_z главного вектора $\vec{Q}$ на оси декартовых координат равны суммам проекций сил на соответствующие оси:

$$Q_x = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kx},\ Q_y = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ky},\ Q_z = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kz}.$$

Модуль главного вектора $\vec{Q}$ и направляющие косинусы определяется по формулам:

$$\left|\vec{Q}\right| = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2},$$

$$\cos\left(\widehat{x,\vec{Q}}\right) = \frac{Q_x}{|\vec{Q}|},\ \cos\left(\widehat{y,\vec{Q}}\right) = \frac{Q_y}{|\vec{Q}|},\ \cos\left(\widehat{z,\vec{Q}}\right) = \frac{Q_z}{|\vec{Q}|}.$$

Главный момент $\vec{M}_o$ пространственной системы сил относительно центра O равен векторной сумме моментов всех сил относительно того же центра:

$$\vec{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k.$$

Проекции главного момента $\vec{M}_o$ на оси декартовых координат называются главными моментами m_x, m_y, m_z относительно соответствующих осей, таким образом: $\vec{M}_o = m_x\vec{\imath} + m_y\vec{\jmath} + m_z\vec{k}$.

Теорема о приведении системы сил к центру: произвольная система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна одной силе, приложенной в наперед выбранном центре P, и одной паре сил. При этом сила равна главному вектору системы сил $\vec{Q}$, а момент пары сил – главному моменту системы сил $\vec{M}_P$ относительно выбранного центра.

Теорема об эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу: для того, чтобы системы сил были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы у них были одинаковые главные векторы $\vec{Q}_i$ и главные моменты $\vec{M}_{o_i}$ относительно одного и того же центра O.

Теорема о параллельном переносе силы: силу, не меняя ее действия на твердое тело, можно параллельно перенести в любую точку тела, добавив к нему при этом пару сил (эта пара называется присоединенной), момент которой равен моменту переносимой силы относительно той точки, куда сила переносится.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: если система сил имеет равнодействующую $\vec{R}$, то ее момент относительно любого центра P равен геометрической сумме векторов моментов всех сил системы относительно того же центра:

$$\vec{M}_P(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_P\left(\vec{F}_k\right).$$

Следствием данной теоремы является то, что момент равнодействующей относительно произвольной оси равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно той же оси.

2. Условия уравновешенности системы сил, приложенных к твердому телу

2.2. Уравнения равновесия твердого тела

Для того, чтобы система сил, приложенных к твердому телу, была уравновешенной, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю ее главный вектор и главный момент относительно какого-либо центра

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0, \vec{M}_P = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_P\left(\vec{F}_k\right) = 0. \tag{1}$$

Условия уравновешенности системы сил, приложенных к твердому телу, в координатной форме получаются из векторных уравнений (1) и имеют вид системы, состоящей из шести уравнений

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k\right) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Верхние три уравнения называются уравнениями проекцийсил на координатные оси; они отражают тот факт, что при равновесии твердого тела алгебраическая сумма проекций всех сил, приложенных к телу, на каждую координатную ось должна быть равна нулю. Нижние три уравнения системы называются уравнениями моментов сил относительно координатных осей. Эти уравнения указывают на то, что при равновесии тела алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих на тело, относительно каждой координатной оси должна быть равна нулю.

Система (2) называется основной системой уравнений равновесия твердого тела, находящегося под действием произвольной системы сил. Существуют и другие формы системы уравнений равновесия, каждая из которых состоит из шести уравнений. При использовании таких систем нужно следить за выполнением условий, накладывающих ограничения на выбор осей, относительно которых вычисляются суммы моментов.

2.3. Частные случаи уравнений равновесия твердого тела

В таких случаях расположения сил одно или несколько уравнений системы (2) могут обращаться в тождества. Например, если все силы перпендикулярны координатной оси z, в тождество обращается уравнение проекций на ось z, и число уравнений равновесия уменьшается в этом случае до пяти; если линии действия всех сил пересекают ось y, в тождество обращается уравнение моментов относительно оси y.

Далее рассмотрим системы сил, равновесие которых описывается тремя уравнениями равновесия.

Система сил называется *сходящейся*, если линии действия сил пересекаются в одной точке. Выберем начало координат в этой точке. Тогда уравнения моментов основной системы (2) обращаются в тождества, а оставшиеся три

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0$$

образуют систему уравнений равновесия.

Система сил называется *плоской*, если силы располагаются в одной плоскости. Направим координатные оси так, чтобы все силы оказались в плоскости Oxy; в этом случае третье, четвертое и пятое уравнения основной системы (2) обращаются в тождества, оставшиеся три

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_O(\vec{F}_k) = 0 \tag{3}$$

образуют систему уравнений равновесия плоской системы сил. Здесь уравнения моментов относительно оси z записано в иной, эквивалентной форме: в данном случае векторы моментов перпендикулярны плоскости действия сил, если центр расположен в той же плоскости. Поэтому можно рассматривать момент силы относительно центра как скалярную величину и знак его будет определятся поворотом вокруг этого центра.

В случае плоской системы сил можно пользоваться и другими формами уравнений равновесия. Такими, например, являются

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0,$$

где A, B – любые точки плоскости, для которых отрезок AB неперпендикулярен оси x. Или еще одна форма уравнений равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_C(\vec{F}_k) = 0,$$

где A, B, C – любые точки плоскости, не лежащие на одной прямой.
Совокупность сил называется *системой параллельных сил*, если линии действия сил параллельны. Ось z направим параллельно линиям действия. Первое, второе и шестое уравнения основной системы (2) обращаются в тождества, оставшиеся

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0$$

образуют систему уравнений равновесия тела, находящегося под действием параллельных сил.

3. Решение задач статики

3.1. Общий алгоритм решения задач

Общей схемой решения практических задач о равновесии тела или конструкции, состоящей из нескольких тел, может служить следующий алгоритм:
1) выбираем твердое тело (или конструкцию), равновесие которого надо рассмотреть для определения неизвестных величин, и изображаем активные силы;
2) если твердое тело не свободно, то используя аксиому освобождаемости от связей, заменяем действие механических связей соответствующими реакциями связей;

3) рассматриваем равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связи;
4) применяя необходимые и достаточные условия равновесия данной системы сил, определяем неизвестные величины, учитывая статическую определимость задачи: число неизвестных не должно превышать числа уравнений равновесия для рассматриваемой системы сил.

В ответе может оказаться, что величина какой-нибудь неизвестной силы отрицательна, но это означает лишь то, что направление этой силы противоположно тому, которое было изображено на рисунке.

Также полезно выбирать оси декартовой системы координат так, чтобы большинство векторов сил было параллельно одной из осей. При составлении уравнения моментов рекомендуется выбирать ту точку, которая лежит на линии действия неизвестной силы, что даст возможность найти эту неизвестную непосредственно из уравнения моментов.

3.2. Примеры решения

Задача 1(плоская произвольная система сил). *Определить реакции опор A, B, C и шарнира D составной балки, изображенной на рис. 17. вместе с нагрузкой*

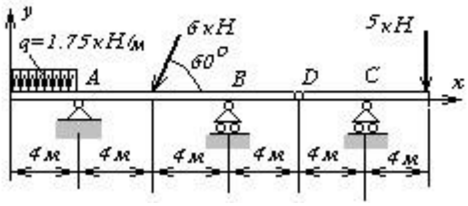

Рис. 17

Решение. Расставим силы, как показано на рис. 18.

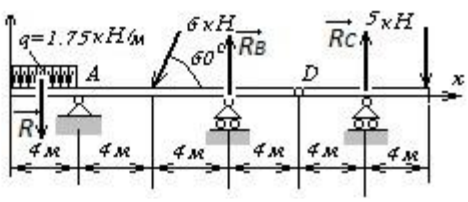

Рис. 18

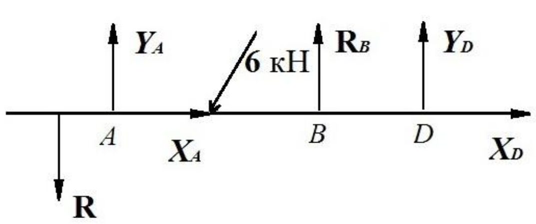

Рис. 18а

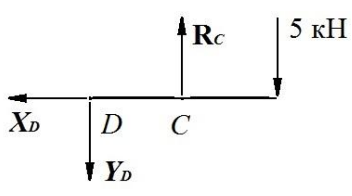

Рис. 18б

Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{R}$. Тогда $\vec{R} = \vec{q}a$, где $a = 4$ м, тогда $R = 7$ кН. Мысленно разобьем конструкцию на левую (Рис. 18а) и правую часть (Рис. 18б) в шарнире D. Рассмотрим равновесие частей балки AD и DC, заменив действие в D составляющими реакции связи X_D, Y_D. Из левой части получим:

$X_A - 6\cos 60^\circ + X_D = 0,$
$Y_A + Y_D + R_B - R - 6\sin 60^\circ = 0,$
$R \cdot 2 - 6\sin 60^\circ \cdot 4 + R_B \cdot 8 + Y_D \cdot 12 = 0.$
Из второй части получим:
$-X_D = 0,$
$R_C - Y_D - 5 = 0,$
$R_C \cdot 4 - 5 \cdot 8 = 0.$
Решая системы уравнений, находим неизвестные $X_A = 3$ кН, $Y_A = 13{,}8$ кН, $R_B = -6{,}65$ кН, $R_C = 10$ кН, $X_D = 0$, $Y_D = 5$ кН.

Задача 2 (пространственная произвольная система сил). *Однородная прямоугольная рама веса 200 Н прикреплена к стене при помощи шарового шарнира A и петли B и удерживается в горизонтальном положении веревкой CE, привязанной в точке C рамы и к гвоздю E, вбитому в стену на одной вертикали с A, причем $\angle ECA = \angle BAC = 30^\circ$ (Рис. 19). Определить натяжение веревки и опорные реакции.*

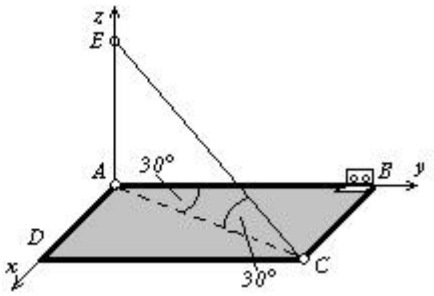

Рис. 19

Решение. Изобразим силы (Рис. 20) и рассмотрим равновесие рамы $ABCD$.

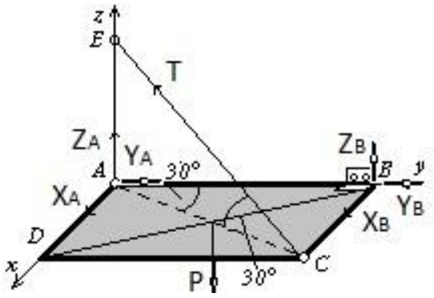

Рис. 20

$X_A + X_B - T\cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ = 0,$
$Y_A - T\cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0,$
$Z_A + Z_B + T\sin 30^\circ - P = 0,$
$Z_B \cdot AB + T\sin 30^\circ \cdot AB - P \cdot AB/2 = 0,$
$P \cdot \frac{BC}{2} - T\sin 30^\circ \cdot BC = 0,$
$-X_A \cdot AB = 0.$
Решая систему уравнений, получаем неизвестные величины: $T = 200$ Н,

$X_A = 86{,}6$ Н, $Y_A = 150$ Н, $Z_A = 100$ Н, $X_B = Z_B = 0$.

3.3. Примеры для самостоятельного решения

1. К шарнирному болту B (Рис. 21) подвешен груз Q весом 1000 Н. Определить усилия в стержнях. $AB = 1$, $BC = 2$, $\alpha = 45^{\circ}$, $\beta = 45^{\circ}$.

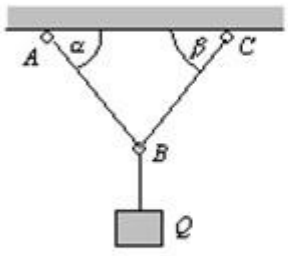

Рис. 21

2. К шарнирному болту B (Рис. 22) подвешен груз Q весом 1000 Н. Определить усилия в стержнях. $AB = 1$, $BC = 2$, $\alpha = 30^{\circ}$, $\beta = 60^{\circ}$.

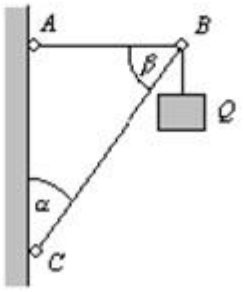

Рис. 22

3. К шарнирному болту B (Рис. 23) подвешен груз Q весом 1000 Н. Определить усилия в стержнях. $AB = 2$, $BC = 1$, $\alpha = 60^{\circ}$, $\beta = 30^{\circ}$.

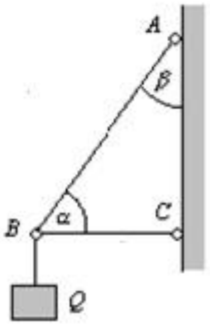

Рис. 23

4. Электрическая лампа весом 20 Н подвешена к потолку на шнуре AB и затем оттянута к стене веревкой BC (Рис. 24). Определить натяжения T_A и T_C шнура AB и веревки BC, если $\alpha = 60^{\circ}$, $\beta = 135^{\circ}$.

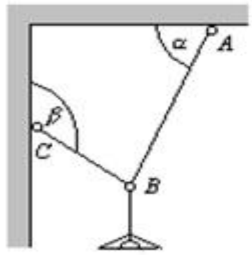

Рис. 24

5. Мачтовый кран состоит из стрелы AB и троса CB (Рис. 25). К концу B стрелы подвешен груз весом 2 кН. Определить натяжение троса CB и усилие в стреле AB, если $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 135^\circ$.

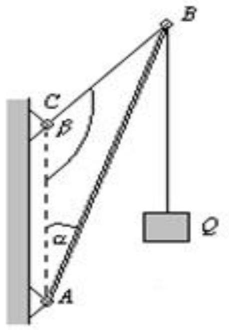

Рис. 25

6. Определить реакции опор A и B (Рис. 26).

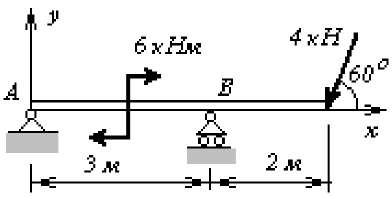

Рис. 26

7. Определить реакции опор A и B (Рис. 27).

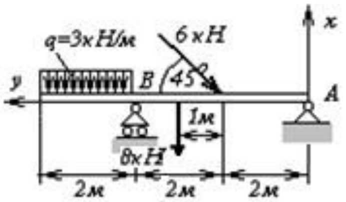

Рис. 27

8. Определить реакции консольной балки (Рис. 28).

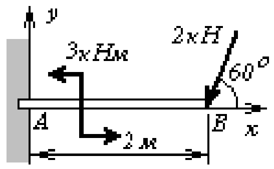

Рис. 28

9. Определить реакции консольной балки (Рис. 29).

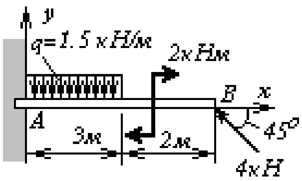

Рис. 29

10.Определить реакции составной балки (Рис. 30).

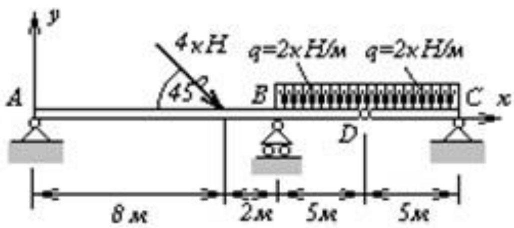

Рис. 30

11. Груз $Q = 100$ Н поддерживается брусом AO, шарнирно закрепленным в точке A и наклоненным под углом 45° к горизонту, и двумя горизонтальными канатами BO и CO одинаковой длины (Рис. 31). Найти усилия в брусе и натяжения канатов.

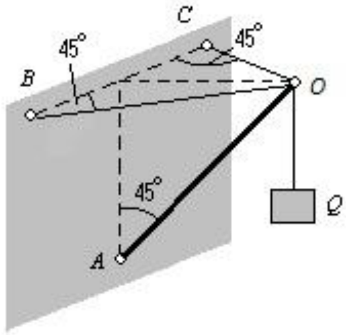

Рис. 31

12. В точке O подвешен груз Q весом 300 Н (Рис. 32). Определить усилия в стержнях CO, BO и усилие в тросе AO, если $\angle CBO = \angle BCO = 60^{\circ}$, а $\angle EOA = 30^{\circ}$.

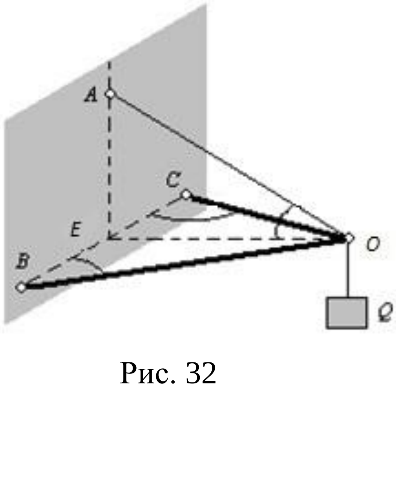

Рис. 32

13. В точке A удерживается груз $Q = 420$ Н посредством стержня AB и цепей AC и AD (Рис. 33). Определить усилия в стержне цепях, если $AB = 145$ см, $AC = 80$ см, $AD = 60$ см.

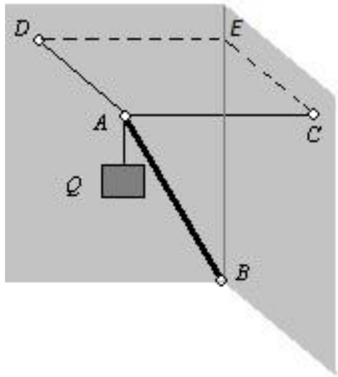

Рис. 33

14. В точке O подвешен груз Q весом 180 Н (Рис. 34). Определить усилия в стержнях $CO,\ BO$ и тросе AO, если $AO = 170$ см, $CO = BO = 100$ см, $BC = 120$ см, $CE = EB$.

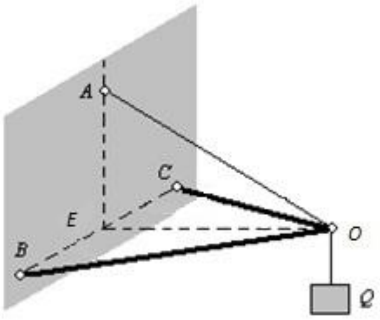

Рис. 34

15. В точке O подвешен груз Q весом 1 кН (Рис. 35). Определить реакции опор A, B и C.

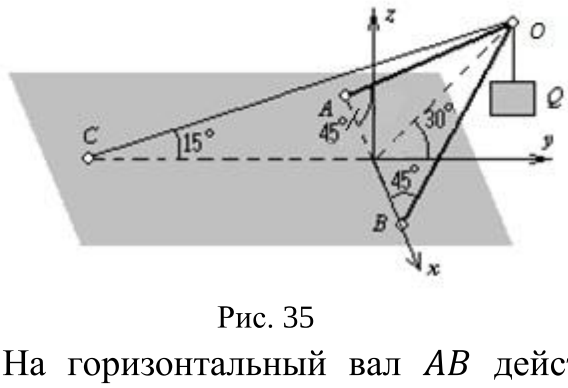

Рис. 35

16. На горизонтальный вал AB действует груз $P = 1$ кН, надетый на стержень DE, жестко связанный с валом AB, и груз $Q = 250$ Н, привязанный к шкиву $R = 20$ см посредством троса (Рис. 36). Стержень DE перпендикулярен оси вала и составляет с вертикалью 30°. Определить реакции опор A, B и расстояние l центра тяжести тела P.

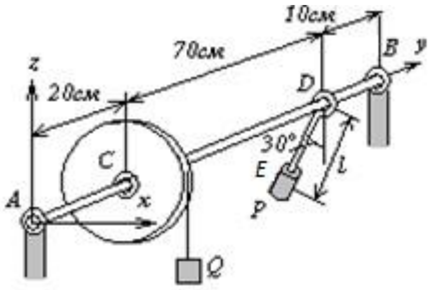

Рис. 36

17. На горизонтальный вал AB насажены зубчатое колесо C радиуса 1 м и шестерня D радиуса 10 см (Рис. 37). К ним соответственно приложены горизонтальная сила $P = 100$ Н и вертикальная сила Q. Определить величину силы Q и реакции опор A и B в положении равновесия.

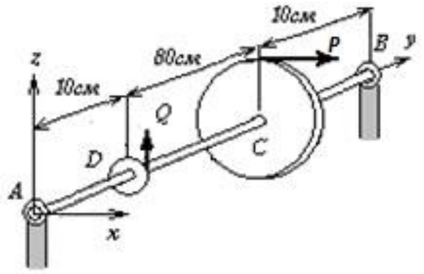

Рис. 37

18. Ворот удерживается вертикальной силой P, приложенной к рукоятке $AK = 40$ см (Рис. 38). Вес груза $Q = 800$ Н, радиус барабана C равен 5 см, $AC = CB = 50$ см. Определить силу P и реакции опор A и B.

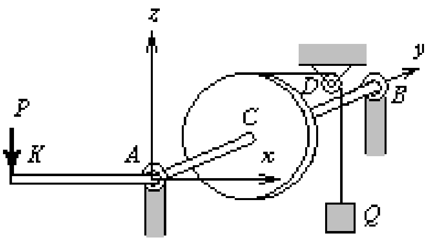

Рис. 38

19. Вес полки вагона и лежащего на ней груза равен 800 Н и приложен в центре прямоугольника $ABCD$ (Рис. 39) Определить усилие в стержне ED и реакции петель K и H, если $AB = 150$ см, $AD = 60$ см, $AK = BH = 25$ см, $ED = 75$ см.

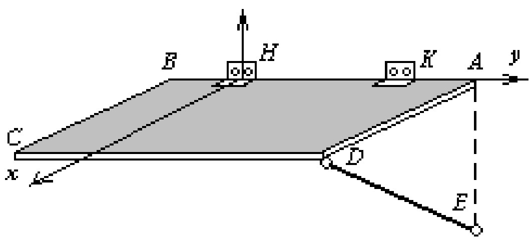

Рис. 39

20. Квадратная однородная пластина $ABCD$ со стороной $AB = 30$ см и веса $P = 5$ Н находится в равновесии (Рис. 40). В точке E плита опирается на острие. Сила $F = 10$ Н параллельна оси x. $CE = ED$, $BH = 10$ см. Определить опорные реакции.

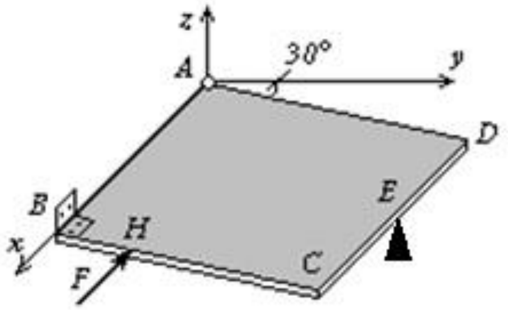

Рис. 40

Список литературных источников

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика: Учебное пособие. 12 изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2013. – 672 с.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки: СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 480 с.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Изд-во ЧеРо, 1999. – 572 с.
4. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учебное пособие. 45-е изд, стер. / Под ред. Пальмова В.А., Меркина Д.Р. – СПб.: Изд-во «Лань», 2006. – 448 с.
5. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Учебное пособие: М.: Изд-во «Высшая школа», 1978. – 388 с.

Содержание